Il pendolo fisico

Un pendolo fisico è un corpo rigido libero di rotare attorno ad un asse fisso non passante per il suo centro di massa. Il moto del pendolo è completamente descritto dall'angolo di rotazione θ(t), che misuriamo per convenzione a partire dalla condizione di equilibrio. Lasciandolo libero a partire da un angolo non nullo, il pendolo oscilla.

Se l'asse è orizzontale, l'equazione del moto è, trascurando gli attriti che causano lo smorzamento dell'oscillazione,

(1.1) $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Mgd}{I}\cdot\sin\theta=0$$

dove I è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione, M è la sua massa, g l'accelerazione di gravità, d la distanza tra l'asse e il baricentro e θ è l'ampiezza massima dell'angolo di oscillazione.

Ricordiamo che nel caso del pendolo semplice l'equazione è

(1.2) $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\cdot\sin\theta=0$$

dove l è la lunghezza del pendolo. Quindi un pendolo fisico ha la stessa dinamica di un pendolo semplice con $l=\frac{I}{M\cdot d}$.

Si trova che il periodo di oscillazione è

(1.3) $$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{Mgd}}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{9}{64}\cdot\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\dots\right)$$

Definiamo $T_0=2\pi\cdot\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$ il periodo per le piccole oscillazioni.

In questa esperienza utilizzeremo il pendolo Pasco, composto da una asticella che può essere fissata ad un perno tramite un bulloncino in posizione centrale o decentrata. Il perno è collegato ad un misuratore di rotazione interfacciato al computer. Sulla asticella possono essere fissati uno o più blocchetti di ottone che modificano il momento di inerzia del pendolo.

Operazioni iniziali

Misurare massa e dimensioni della asticella e dei blocchetti, la distanza b tra i due fori dell'asticella e il diametro del cerchietto di plastica usato per fissare l'asticella.

Verificare l'orizzontalità dell'asse di rotazione.

Predisporre il sistema per campionamento a 20 Hz e alta risoluzione (0.25° - 1440 punti a giro).

Misure ampiezza e periodo

Scelta una data configurazione del pendolo (scelto cioè il punto di sospensione e la posizione del/degli eventuali blocchetti, osserveremo l'ampiezza e il periodo delle oscillazioni. Queste informazioni possono ricavarsi direttamente dai grafici prodotti dal sistema di acquisizione DataStudio o, con maggiore efficienza, elaborando i dati archiviati dal sistema in un file.

Ciò può farsi in vari modi con un programma (per esempio in C o in Matlab). In alternativa si può importare i dati del file in un foglio Excel e quindi elaborare i dati come colonne Excel.

Esempio di foglio Excel:

colonna 1 (A) : ascissa temporale (da DataStudio)

colonna 2 (B) : angolo "rozzo" (da DataStudio)

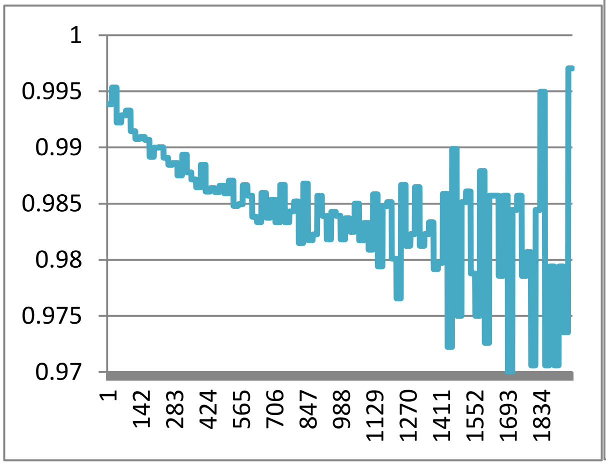
colonna 3 (C) : angolo corretto (B-media(B)) [in C2 **=B2-C1** e in C1 **=MEDIA(B2:B2516)**]

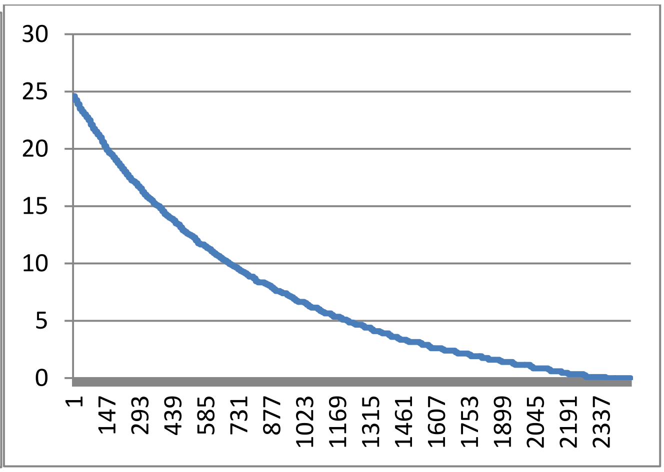
colonna 4 (D): tempo dell'inizio dell'oscillazione (passaggio per 0) [in D14 **=SE(E(C13<0;C14>=0);A13-C13*0.05/(C14-C13);D13)**]

colonna 5 (E): periodo [in E15 **=SE(D15>D14;D15-D14;E14)**]

colonna 6 (F): ampiezza [in F30 **=(MAX(C1:C30)-MIN(C1:C30))/2**]

Le colonne E e F possono essere utilizzate per fare ulteriori elaborazioni (per esempio per il calcolo di T_0) 0 possono essere graficate; ecco i grafici prodotti da Excel per il periodo e l'ampiezza:





Relazione ampiezza/periodo

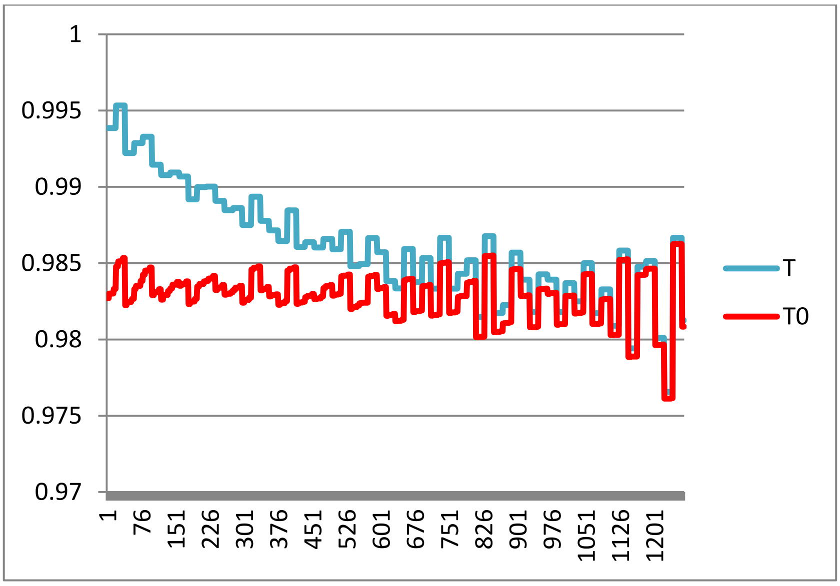
L'andamento teorico del periodo in funzione dell'ampiezza dell'oscillazione è, in prima approssimazione,

(1.4) $$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \ldots\right) = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \ldots\right)$$

Possiamo controllare se nel caso del nostro esperimento ciò sia verificato e misurare quanto vale T_0. Ciò può essere fatto a partire dai valori di ampiezza e periodo calcolati col programma o Excel. Otteniamo per T_0

(1.5) $$T_0 = \frac{T}{1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}$$

Si può calcolare T_0 creando una nuova colonna (per esempio G) col comando ,
=E34/(1+0.25*SEN(F34*PI.GRECO()/360)^2) (il comando è, per la riga 34) . Ecco il grafico:



Calcolo del centro di massa e del momento di inerzia del pendolo

Per questi calcoli supponiamo che il montaggio dell'asticella sia perfettamente ortogonale all'asse di rotazione.

Per calcolare il centro di massa di un corpo rigido composto di più parti, ricordiamo che se ciascuna parte ha massa m_i e centro di massa $\vec{x}_i$, si ha per il c.d.m.

(1.6)
$$\vec{x} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{x}_i}{\sum m_i}$$

Per la simmetria del montaggio possiamo rappresentare il centro di massa con una singola coordinata che indicherà la distanza dall'asse di sospensione. Detta semplicemente d il valore in questa coordinata e di i centri di massa in questa coordinata delle varie parti, abbiamo

(1.7)
$$d = \frac{\sum m_i \cdot d_i}{\sum m_i}$$

Calcoliamo il momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di rotazione. Ricordiamo i seguenti due teoremi:

- Il momento d'inerzia di un corpo rigido composto da più parti rispetto a un asse è dato dalla somma dei momenti d'inerzia rispetto all'asse delle varie parti.

- Il momento d'inerzia I di un corpo rispetto a un asse a è dato dalla

(1.8)
$$I = I_0 + M \cdot d^2$$

dove I_0 è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse passante per il centro di massa e parallelo ad a, M la massa del corpo e d la distanza tra il centro di massa e l'asse.

Il nostro pendolo è composto da

- una asticella di massa M_a e lunghezza L_a, il cui centro di massa è nel centro (corrispondente al foro centrale). Essendo d_a la distanza tra l'asse e il centro di massa dell'asticella, il momento d'inerzia è dato da

(1.9)
$$I_a = \frac{M_a L_a^2}{12} + M_a d_a^2$$

il valore di d_a è 0 se si usa per la connessione all'asse rotante il foro centrale, ed è b (distanza tra i due fori) se si usa il foro superiore.

- n (= 0, 1 o 2) blocchetti di ottone fissati all'asticella. Ciascun blocchetto ha una massa M_i, altezza h_i, raggio esterno r_{i1} e raggio del foro r_{i2} e sia posizionato (posizione del centro di massa) a una distanza d_i dall'asse. L'i-esimo blocchetto ha un momento d'inerzia

(1.10) $$I_i = \frac{M_i}{12} \cdot \left(3 \cdot \left(r_{i2}^2 + r_{i1}^2\right) + h^2\right) + M_i \cdot d_i^2$$

- l'asse e il sistema di fissaggio all'asse: questa parte ha, grazie alla sua simmetria, la particolarità di avere il centro di massa sull'asse di rotazione del pendolo. Il momento d'inerzia I_x di questa parte del pendolo non può essere calcolato (non possiamo smontare il sistema), ma può valutarsi con un apposito esperimento. I_x è comunque molto più piccolo di quello delle altre parti e quindi in prima approssimazione si può trascurare, o comunque non occorre valutarlo con grande accuratezza.

Il momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di rotazione è quindi dato da

(1.11) $$I = I_x + I_a + \sum I_i$$

Misura di I_x

Supponiamo di avere un corpo, rotante attorno a un asse, composto di due parti, una di massa, centro di massa e momento d'inerzia noti M_0 , d_0 e I_0 e una di massa e momento d'inerzia ignoti M_x e I_x e centro di massa sull'asse. Si è così realizzato un semplice pendolo che ha periodo di oscillazione

(1.12) $$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + I_x}{\left(M_0 + M_x\right) \cdot g \cdot \dfrac{M_0 d_0 + M_x \cdot 0}{M_0 + M_x}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + I_x}{g \cdot M_0 \cdot d_0}}$$

Come si vede, nella relazione non compare M_x.

Possiamo utilizzare questa equazione per misurare I_x. Per far ciò fissiamo col nastro adesivo leggero un bullone (o qualsiasi piccola massa) di massa m sulla periferia del cerchietto di plastica di raggio r (senza il montaggio dell'asticella). Diamo un piccolo angolo di rotazione al sistema e osserviamo le oscillazioni.

Ricordiamo che non occorre una grande accuratezza nella misura di I_x, poiché il suo valore sarà sempre sommato agli altri termini che sono molto maggiori. Possiamo quindi usare metodi semplici per valutare T_0 , porre $I_0 = m \cdot r^2$ e porre semplicemente g = 980 cm/s^2 . Calcoliamo quindi

(1.13) $$I_x = \frac{T_0^2 g \cdot m \cdot r}{4\pi^2} - m \cdot r^2$$

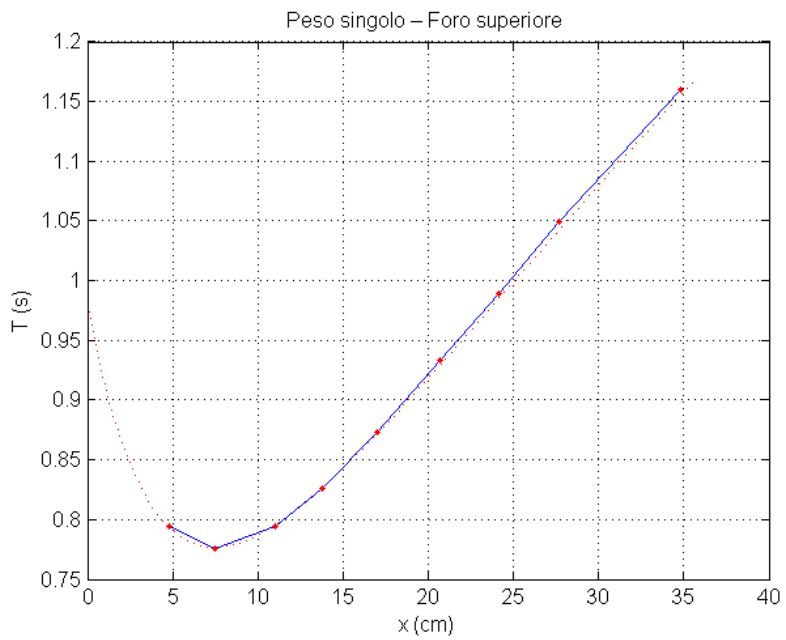
Si noti che, ovviamente, non ricaviamo informazioni su M_x.

Verifica del periodo

Possiamo procedere in due modi:

Usare il foro superiore ed un solo blocchetto:

Ecco il grafico dei valori di periodo trovati (in puntinato sono i valori attesi) al variare della posizione x del blocchetto:



Usare il foro centrale e due blocchetti:

Fissare un blocchetto nella parte centrale della metà superiore dell'asticella, e quindi l'altro blocchetto nella metà inferiore (ma in modo da lasciare il centro di massa nella metà inferiore. Si nota che si possono raggiungere periodi molto lunghi se il secondo blocchetto si avvicina molto alla posizione simmetrica a quella del primo blocchetto; se la raggiunge, il pendolo non ha più una posizione di equilibrio stabile e il periodo va all'infinito. Se il secondo blocchetto supera questa posizione, il pendolo inverte la sua posizione stabile (cioè si rigira). In questa configurazione si possono ottenere periodi molto lunghi con centro di massa molto vicino all'asse di rotazione.

Misura di g

Cerchiamo ora di ricavare il valore dell'accelerazione di gravità g a partire dalle osservazioni del pendolo fisico. L'equazione da utilizzare è

(1.14) $$g = 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T_0^2 \cdot M \cdot d}$$

dove I, M e d sono il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, la massa e la distanza del baricentro.

Ricordiamo però che non conosciamo parte della massa del pendolo. Poniamo $M = M_x + M_R$, dove M_x è la massa del perno e del sistema di bloccaggio all'asse e M_R è la restante parte. Non conoscendo M_x , non conosciamo neanche la posizione del centro di massa del pendolo. Tuttavia, poiché la M_x ha il centro di massa sull'asse, possiamo ottenere una nuova espressione sviluppando il prodotto M·d come

(1.15) $$M \cdot d = \left(M_R + M_x\right) \cdot \frac{M_R \cdot d_R + M_x \cdot 0}{M_R + M_x} = M_R \cdot d_R$$

dove d_R è il centro di massa della parte restante.

Quindi possiamo usare

(1.16) $$g = 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T_0^2 \cdot M_R \cdot d_R}$$

dove

(1.17) $$M_R = M_a + \sum M_i$$ $$d_R = \frac{M_a \cdot d_a + \sum M_i \cdot d_i}{M_R}$$

Per ottenere i migliori risultati occorre ridurre al minimo gli errori di posizione dei blocchetti e ciò può farsi per esempio non usando blocchetti o ponendo un solo blocchetto in posizioni in cui sia minimo l'errore di posizione (per esempio all'estremo).

Lo studio dell'incertezza della misura non è semplicissimo. In casi come questo è conveniente farlo tramite una simulazione (nel gergo dei fisici un "montecarlo").

Errori sistematici

In questa misura sono presenti vari errori sistematici. Ecco i più interessanti:

- **non orizzontalità dell'asse di rotazione**: si riduce il valore della forza (di gravità) che richiama il pendolo nella posizione di equilibrio; in altri termini il pendolo "vede" un minor valore di g. Se l'errore di orizzontalità è l'angolo ϕ, si ha un errore sistematico relativo $\cos(\phi)-1$.
- **non ortogonalità del pendolo con l'asse di rotazione**: poiché nel calcolo del momento d'inerzia noi supponiamo che l'asticella sia ortogonale all'asse di rotazione, è come se riducesse il momento d'inerzia "effettivo" rispetto all'asse. Infatti, poiché nella (1.16) poniamo un valore più elevato di I, l'effetto aumenta il valore di g.
- **sostegno non perfettamente rigido**: il sostegno oscilla anch'esso col pendolo e quindi è come se il pendolo fosse più "lungo"; l'effetto è quindi quello di valutare un g inferiore
- **errore sull'orologio dell'acquisizione**
- **errore di modello** (per esempio asimmetria nella bacchetta dovuta alla presenza del foro superiore)
- **presenza dello smorzamento dovuto ad attrito con l'aria** (trascurato in questo studio): aumenta il periodo e quindi diminuisce il valore di g calcolato con la (1.16); nel nostro caso questo effetto è sicuramente trascurabile.

Smorzamento

Ci sono due principali cause di attrito nel pendolo in studio:

- **attrito viscoso con l'aria**, che si manifesta come una forza che si contrappone al moto, proporzionale con buona approssimazione nel nostro caso alla velocità di rotazione

- **attrito al perno**, in pratica attrito volvente con le sfere dei cuscinetti a sfere che sostengono il perno; questo attrito è schematizzabile come una forza costante agente tangenzialmente al perno e che si contrappone alla rotazione.

L'equazione è

(1.18)
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma \cdot \frac{d\theta}{dt} + k_P \cdot sign\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{Mgd}{I} \cdot \sin\theta = 0$$

dove il termine $2\gamma \cdot \frac{d\theta}{dt}$ descrive l'attrito viscoso e produce uno smorzamento esponenziale, mentre il termine $k_P \cdot sign\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ descrive l'attrito al perno e produce uno smorzamento lineare. Questo secondo termine prevale quando il periodo è molto lungo e il centro di massa è vicino all'asse.